SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Andrea Pascucci

IL METODO ITERATIVO DI MOSER PER UNA CLASSE DI EQUAZIONI ULTRAPARABOLICHE

9 aprile 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Riassunto. Adattiamo il procedimento iterativo di Moser per provare che le soluzioni deboli di un'equazione ultraparabolica, a coefficienti misurabili, sono funzioni localmente limitate. A causa della forte degenerazione dell'equazione, il nostro metodo differisce da quello classico poichè si basa su delle opportune stime di tipo Sobolev valide solo per le sopra e sotto-soluzioni.

Abstract. We adapt the iterative scheme by Moser, to prove that the weak solutions to an ultraparabolic equation, with measurable coefficients, are locally bounded functions. Due to the strong degeneracy of the equation, our method differs from the classical one in that it is based on some ad hoc Sobolev type inequalities for super and sub-solutions.

1 Introduzione

In questo seminario presentiamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con Sergio Polidoro. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali del second'ordine

$$Lu(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{m_0} \partial_{x_i} \left(a_{ij}(x,t) \partial_{x_j} u(x,t) \right) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} u(x,t) - \partial_t u(x,t) = 0 \qquad (1.1)$$

dove $(x,t) = (x_1, \ldots, x_N, t) = z$ indica il punto in $\mathbb{R}^{N+1}$, e $1 \leq m_0 \leq N$.

Vogliamo adattare il metodo iterativo introdotto da Moser in [31, 32, 33] per le equazioni uniformemente paraboliche, per provare che le soluzioni distribuzionali di (1.1) sono funzioni localmente limitate. Ricordiamo che la tecnica di Moser è basata sull'utilizzo di stime di tipo Caccioppoli opportunamente combinate con il teorema di immersione di Sobolev. A causa della forte degenerazione dell'operatore L, lo studio di (1.1) presenta delle difficoltà nuove. Infatti, anche la soluzione u di (1.1) verifica una disuguaglianza di tipo Caccioppoli che, tuttavia, fornisce una stima delle sole derivate $\partial_{x_j} u$, $j = 1, ..., m_0$, e non si ha alcuna informazione sulle altre $N - m_0$ derivate spaziali.

In effetti, le estensioni del metodo di Moser disponibili in letteratura si basano implicitamente sul fatto che la disuguaglianza di Sobolev (eventualmente adattata all'ambito funzionale considerato) sia un ingrediente essenziale di tale procedura iterativa (cfr., per esempio, [40], [12], [13] e [14]). Tuttavia, nel nostro caso, le stime di Caccioppoli danno informazioni parziali che non possono essere colmate dal classico teorema di Sobolev.

L'idea è allora quella di provare delle *stime di tipo Sobolev per le sopra e sotto-soluzioni di* (1.1), che siano abbastanza accurate da poter essere utilmente combinate con le stime di Caccioppoli. A tal fine, rappresentiamo la soluzione u in termini di una *parametrice* di L, ossia in termini della soluzione fondamentale del seguente operatore

$$L_0 = \Delta_{m_0} + Y, \qquad (1.2)$$

dove Δ_{m_0} è l'operatore di Laplace nelle variabili $x_1, \ldots, x_{m_0}$ e Y è la parte del prim'ordine di L:

$$Y = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t. \qquad (1.3)$$

Con un piccolo abuso di linguaggio, chiameremo L_0 la *parte principale di* L. Dunque, se u è soluzione di (1.1), formalmente abbiamo

$$L_0 u = (L_0 - L) u = \sum_{i=1}^{m_0} \partial_{x_i} F_i, \qquad (1.4)$$

dove

$$F_i = \sum_{j=1}^{m_0} \left(\delta_{ij} - a_{ij} \right) \partial_{x_j} u, \qquad i = 1, \ldots, m_0.$$

Poichè i termini F_i dipendono solo dalle derivate $\partial_{x_j} u$, $j = 1, ..., m_0$, la disuguaglianza di Caccioppoli fornisce una stima H^{-1}_{loc} del membro destro di (1.4). Utilizzando la soluzione fondamentale di L_0, otteniamo poi delle stime L^p_{loc} di u. Questo argomento sembra naturale poichè anche la classica disuguaglianza di Sobolev può essere provata rappresentando le funzioni in H^1 in termini della soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace.

Di seguito, precisiamo le ipotesi che assumeremo.

[I.1] *I coefficienti a_{ij}, $1 \le i, j \le m_0$, sono funzioni misurabili di z. Inoltre $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i, j \le m_0$, ed esiste una costante positiva μ tale che*

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $\xi \in \mathbb{R}^{m_0}$. La matrice $B = (b_{ij})_{i,j=1,...,N}$ è costante.

[I.2] *L_0 è ipoellittico e δ_λ-omogeneo di grado due rispetto ad un opportuno gruppo di dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ in $\mathbb{R}^{N+1}$ (si veda (2.6)).*

Notiamo esplicitamente che, benchè sia espressa in termini di L_0, [I.2] è, in realtà, un'ipotesi sui coefficienti b_{ij} dell'operatore L. Infatti, in base alla ben nota condizione di Hörmander [16], l'ipoellitticità di L_0 è equivalente all'ipotesi

$$\text{rank Lie}\left(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}}, Y\right)(z) = N + 1, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1},$$

dove $\text{Lie}\left(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}}, Y\right)$ indica l'algebra di Lie generata dai campi $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}}, Y$. Dunque risulta chiaro che l'ipoellitticità di L_0 (così come l'esistenza delle dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$) dipende *solo* da m_0 e dalla parte del prim'ordine Y di L. Nel paragrafo 2, richiameremo anche una nota condizione di struttura sulla matrice B equivalente a [I.2].

Notiamo anche che se L è uniformemente parabolico (i.e. $m_0 = N$ e $B \equiv 0$), allora [I.2] è ovviamente soddisfatta. Infatti, la parte principale di L è semplicemente l'operatore del calore che è ipoellittico e omogeneo rispetto alle dilatazioni paraboliche $\delta_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$.

Diamo ora la definizione di soluzione di (1.1). Indichiamo con $D = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispettivamente il gradiente e il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Inoltre, sia D_{m_0} il gradiente nelle variabili $x_1, \ldots, x_{m_0}$.

DEFINIZIONE 1.1 *Soluzione debole di* (1.1) *in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^{N+1}$ è una funzione u tale che $u, D_{m_0}u, Yu \in L^2_{loc}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega -\langle ADu, D\varphi \rangle + \varphi Y u = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.5}$$

Prima di enunciare i nostri risultati principali introduciamo qualche ulteriore notazione. Sia "$\circ$" l'operazione di gruppo in $\mathbb{R}^{N+1}$ definita in (2.3), e consideriamo il cilindro euclideo

$$H_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid |x| < 1,\ |t| < 1\}.$$

Per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $r > 0$, poniamo

$$H_r(z_0) \equiv z_0 \circ (\delta_r(H_1)) = \{z \in \mathbb{R}^{N+1} : z = z_0 \circ \delta_r(\zeta),\ \zeta \in H_1\}. \tag{1.6}$$

Vale il seguente

TEOREMA 1.2 *Sia u una soluzione debole non negativa di (1.1) in Ω. Sia $z_0 \in \Omega$ e siano r, ϱ reali positivi tali che $\frac{r}{2} \leq \varrho < r$ e $\overline{H_r(z_0)} \subseteq \Omega$. Esiste una costante positiva c che dipende solo dalla costante di parabolicità μ e dalla dimensione omogenea Q (cfr. (2.7)), tale che, per ogni $p > 0$, vale*

$$\sup_{H_\varrho(z_0)} u^p \leq \frac{c}{(r-\varrho)^{Q+2}} \int_{H_r(z_0)} u^p. \tag{1.7}$$

La stima (1.7) vale anche per ogni $p < 0$ tale che $u^p \in L^1(H_r(z_0))$.

OSSERVAZIONE 1.3 *Anche le sopra e sotto-soluzioni di (1.1) verificano (1.7) per valori opportuni di p. Più precisamente, (1.7) è valida per*

(i) $p \geq 1$ e $p < 0$, se u è una sotto-soluzione debole non negativa di (1.1) tale che $u^p \in L^1(H_r(z_0))$;

(ii) $p \in]0, \frac{1}{2}[$, se u è una sopra-soluzione debole non negativa di (1.1). In tal caso, la costante c in (1.7) dipende anche da p.

Una conseguenza pressochè immediata dei risultati precedenti è la limitatezza locale delle soluzioni deboli di (1.1).

COROLLARIO 1.4 *Sia u una soluzione debole di (1.1) in Ω. Siano $z_0 \in \Omega$ e $r, \varrho > 0$, come nel Teorema 1.2. Allora si ha*

$$\sup_{H_\varrho(z_0)} |u| \leq \left(\frac{c}{(r-\varrho)^{Q+2}} \int_{H_r(z_0)} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall p \geq 1, \tag{1.8}$$

con $c = c(Q, \mu)$.

Per motivare l'interesse nella classe di operatori considerata, riportiamo alcune applicazioni.

ESEMPIO 1.5 *Consideriamo la famiglia di equazioni cinetiche*

$$\partial_t f - \langle v, \nabla_x f \rangle = \mathcal{Q}(f), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

dove $n \geq 1$ *e* f *è una funzione non negativa. Fisicamente,* (1.9) *fornisce un modello matematico per l'evoluzione di un sistema di particelle che interagiscono per collisione. La soluzione* f *rappresenta, per ogni tempo* $t > 0$, *la densità di probabilità delle particelle con posizione* x *e velocità* v. *L'operatore* $\mathcal{Q}$ *descrive il tipo di collisioni e può essere lineare o non lineare. Per esempio, se*

$$\mathcal{Q}(f) = \Delta_v f$$

(1.9) *diventa il prototipo dell'equazione lineare Fokker-Planck (cfr., per esempio, [8] o [39]) e si scrive nella forma* (1.1) *scegliendo* $m_0 = n, N = 2n$ *e*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove I_n *è la matrice identità* $n \times n$. *In questo caso l'operazione di gruppo di Lie è data da*

$$(v, x, t) \cdot (v', x', t') = (v + v', x + x' + t'v, t + t')$$

e il gruppo di dilatazioni è definito da $\delta_\lambda(v, x, t) = (\lambda v, \lambda^3 x, \lambda^2 t)$.

Nel modello di Boltzmann-Landau (cfr., per esempio, [24] e [25])

$$\mathcal{Q}(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{v_i} \left(a_{ij}(\cdot, f) \partial_{v_j} f \right)$$

e i coefficienti a_{ij} *dipendono dalla funzione incognita attraverso delle espressioni integrali. Questo modello è utilizzato per descrivere le interazioni a livello intermolecolare.*

Equazioni del tipo (1.9) *intervengono anche in matematica finanziaria (cfr. [2], [6] e [1]).*

ESEMPIO 1.6 *L'equazione*

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} \left(a_{ij} \partial_{x_j} u \right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{y_i} u + \sum_{i=1}^{n} y_i \partial_{s_i} u, \qquad (x, y, s, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

interviene nella teoria dei processi di diffusione degeneri (cfr., per esempio, [9] e [43]). L'operatore in (1.10) *soddisfa le ipotesi [I.1]-[I.2] e il gruppo di Lie corrispondente è di passo due. Le dilatazioni associate sono le seguenti* $\delta_\lambda(x, y, s, t) = (\lambda x, \lambda^3 y, \lambda^5 s, \lambda^2 t)$.

Ulteriori motivazioni per lo studio di (1.1) vengono dalla teoria delle equazioni alle derivate parziali. Come detto sopra, nel caso in cui i coefficienti a_{ij} siano costanti, la regolarità C^∞ delle soluzioni è stata provata da Kolmogorov [18] e da Hörmander [16].

Uno studio sistematico di questa classe di operatori è dovuto a Kupcov [20], Lanconelli e Polidoro [22].

Il metodo della parametrice di Levi è stato utilizzato da Weber [44], Il'in [17], Eidelman, Ivasyshen, e Malytska [9] e Polidoro [37], [36] per trattare il caso dei coefficienti a_{ij} Hölderiani. Sotto queste ipotesi, sono state provate stime di tipo Schauder da Satyro [42], Lunardi [26], Manfredini [27]. Inoltre, le proprietà di regolarità delle soluzioni deboli di (1.1) sono state studiate da Bramanti, Cerutti e Manfredini [3], Manfredini e Polidoro [28], Polidoro e Ragusa [38], assumendo un'ipotesi di continuità debole sui coefficienti a_{ij} (si suppone che appartengano ad un opportuno spazio di funzioni ad oscillazione media infinitesima).

Un problema di valori al contorno per un'equazione non lineare della forma (1.1) è stato considerato da Lanconelli e Lascialfari in [21], da Lascialfari e Morbidelli in [23]. In tali lavori si utilizza il teorema del punto fisso di Kakutani-Ky Fan combinato con le precedenti stime interne. Il fatto che le stime a priori dipendono dalla regolarità dei coefficienti a_{ij}, comporta l'assunzione di particolari condizioni sul tipo di nonlinearità dell'operatore.

Il metodo di Moser estende le tecniche precedentemente utilizzate nel caso ellittico [29, 30] e che sono equivalenti a quelle dovute a De Giorgi [7]. Questi risultati classici sono stati generalizzati in molte direzioni (cfr. [5], [15], [4], [35], [45]). Le prime estensioni della tecnica di Moser in ambito non Euclideo sono contenute in [19], [12]. Ricordiamo anche che la tecnica introdotta da Nash [34] e sviluppata in [10], è stata utilizzata in [41], nell'ambito degli operatori subellitici sui gruppi di Lie. Il risultato principale dei lavori sopra citati è la uniforme continuità Hölderiana delle soluzioni deboli. La presente nota rappresenta un primo passo verso il conseguimento di un risultato analogo per le soluzioni di (1.1).

Riconoscimenti. Desidero esprimere la mia gratitudine al Professor Ermanno Lanconelli per il suo interesse al nostro lavoro e per le molte utili discussioni.

2 Preliminari

In questo paragrafo richiamiamo alcuni fatti noti sulla parte principale L_0 di L, e mostriamo qualche risultato preliminare. Riscriviamo L in (1.1) nella forma

$$L = \mathrm{div}(AD) + Y, \tag{2.1}$$

dove $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$, $a_{ij} \equiv 0$ se $i > m_0$ o $j > m_0$, e Y è definito in (1.3). Inoltre poniamo

$$A_0 = \begin{pmatrix} I_{m_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove I_{m_0} è la matrice identità in $\mathbb{R}^{m_0}$. Allora la parte principale di L prende la forma

$$L_0 = \mathrm{div}(A_0 D) + Y.$$

L'operatore L_0 ha la notevole proprietà di essere invariante rispetto a un prodotto di Lie in $\mathbb{R}^{N+1}$. Più precisamente, poniamo

$$E(s) = \exp(-sB^T), \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

e indichiamo con ℓ_ζ, $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, la traslazione a sinistra $\ell_\zeta(z) = \zeta \circ z$ nella legge di gruppo

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \qquad (x,t), (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{2.3}$$

allora si ha

$$L \circ \ell_\zeta = \ell_\zeta \circ L.$$

Ricordiamo che, per le Proposizioni 2.1 e 2.2 di [22], l'ipotesi [I.2] è equivalente ad assumere che rispetto ad una base di $\mathbb{R}^N$, la matrice B abbia la forma canonica

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

dove B_k è una $m_{k-1} \times m_k$ matrice di rango m_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ con

$$m_0 \geq m_1 \geq \ldots m_r \geq 1, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{r} m_k = N.$$

In questo caso le dilatazioni associate a L_0 sono le seguenti

$$\delta_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}, \lambda^2), \qquad \lambda > 0, \tag{2.5}$$

dove I_{m_k} indica la matrice identità $m_k \times m_k$. Possiamo esprimere esplicitamente la seconda parte dell'ipotesi [I.2] con

$$L_0 \circ \delta_\lambda = \lambda^2 \left(\delta_\lambda \circ L_0\right), \qquad \forall \lambda > 0. \tag{2.6}$$

Nel seguito assumeremo sempre che B sia nella forma canonica (2.4).

Indichiamo con $\Gamma_0(\cdot, \zeta)$ la soluzione fondamentale di L_0 in (1.2) con polo in $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$. Un'espressione esplicita di $\Gamma_0(\cdot, \zeta)$ è stata esibita in [16] e [20]:

$$\Gamma_0(z, \zeta) = \Gamma_0(\zeta^{-1} \circ z, 0), \qquad \forall z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}, \; z \neq \zeta,$$

dove

$$\Gamma_0(x, t, 0, 0) = \begin{cases} \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det C(t)}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x, x\rangle\right), & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0, \end{cases}$$

e

$$C(t) = \int_0^t E(s)A_0E^T(s)ds$$

(E è la matrice definita in (2.2)). Osserviamo che l'ipotesi [I.2] implica che $C(t)$ è definita positiva per ogni t positivo (cfr. Proposizione A.1 in [22]). Grazie alle proprietà di invarianza di L_0, non è difficile provare che

$$\Gamma_0(\delta_\lambda(z), 0) = \lambda^{-Q}\Gamma_0(z, 0), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\},\ \lambda > 0,$$

dove

$$Q = m_0 + 3m_1 + \cdots + (2r+1)m_r. \tag{2.7}$$

Il numero naturale $Q+2$ è solitamente chiamato *dimensione omogenea di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *rispetto a* $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$. Tale denominazione sembra opportuna poichè il determinante Jacobiano $J\delta_\lambda$ è uguale a λ^{Q+2}. Indichiamo con $\|\cdot\|$ una norma δ_λ*-omogenea*[1] in $\mathbb{R}^{N+1}$. Vale la seguente stima

$$\Gamma_0(z, \zeta) \le c\|\zeta^{-1} \circ z\|^{-Q}, \tag{2.8}$$

con c costante positiva.

Definiamo l'L_0*-potenziale* della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^{N+1})$ come segue

$$\Gamma_0(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma_0(z, \zeta)f(\zeta)d\zeta, \qquad z \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{2.9}$$

Tale definizione è ben posta in quanto, per ogni $T > 0$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N \times [-T,T]} |\Gamma_0(f)(z)|\, dz \le$$

(invertendo l'ordine di integrazione)

$$\le \int_{\mathbb{R}^{N+1}} |f(\zeta)|d\zeta \int_{\mathbb{R}^N \times [-T,T]} \Gamma_0(z, \zeta)dz \le 2T \int_{\mathbb{R}^{N+1}} |f(\zeta)|d\zeta = 2T\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})}.$$

Richiamiamo anche il seguente risultato generale (cfr., per esempio, [11]).

[1] Per esempio, una norma δ_λ- omogenea è data da

$$\|z\| \equiv \left(\sum_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} + |t|^{\frac{(2r+1)!}{2}} \right)^{\frac{1}{(2r+1)!}}$$

dove $\alpha_j = (2r+1)!$ se $1 \le j \le m_0$ e

$$\alpha_j = \frac{(2r+1)!}{2k+1}, \qquad \text{se } 1 + \sum_{i=0}^{k-1} m_i \le j \le \sum_{i=0}^{k} m_i,\ 1 \le k \le r.$$

TEOREMA 2.1 *Siano* $\alpha \in]0, Q+2[$ *e* $G \in C(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\})$ *una funzione* δ_λ*-omogenea di grado* $\alpha - Q - 2$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$ *per qualche* $p \in]1, +\infty[$, *allora la funzione*

$$G_f(z) \equiv \int_{\mathbb{R}^{N+1}} G(\zeta^{-1} \circ z) f(\zeta) d\zeta,$$

è definita quasi ovunque ed esiste una costante $c = c(Q,p)$ *tale che*

$$\|G_f\|_{L^q(\mathbb{R}^{N+1})} \leq c \max_{\|z\|=1} |G(z)| \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})},$$

dove q *è definita da*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q+2}.$$

Per comodità, enunciamo separatamente alcune stime del potenziale che useremo in seguito. Tali stime sono essenzialmente contenute nel teorema precedente. Osserviamo anche che, per le proprietà di omogeneità di Γ_0, il potenziale $\Gamma_0(D_{m_0} f)$ è ben definito per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^{N+1})$, almeno in senso distribuzionale, ossia

$$\Gamma_0(D_{m_0} f)(z) \equiv - \int_{\mathbb{R}^{N+1}} D_{m_0}^{(\zeta)} \Gamma_0(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta. \tag{2.10}$$

In (2.10), l'apice in $D_{m_0}^{(\zeta)}$ indica che stiamo differenziando rispetto alla variabile ζ.

COROLLARIO 2.2 *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R}^{N+1})$. *Esiste una costante positiva* $c = c(Q)$ *tale che*

$$\|\Gamma_0(f)\|_{L^{2\widetilde{\kappa}}(\mathbb{R}^{N+1})} \leq c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+1})}, \tag{2.11}$$

$$\|\Gamma_0(D_{m_0} f)\|_{L^{2\kappa}(\mathbb{R}^{N+1})} \leq c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+1})}, \tag{2.12}$$

dove $\widetilde{\kappa} = 1 + \frac{4}{Q-2}$ *e* $\kappa = 1 + \frac{2}{Q}$.

PROVA. La stima (2.11) è conseguenza immediata del Teorema 2.1 e dell'omogeneità di Γ_0. Per provare (2.12), è sufficiente osservare che, per la (2.10), si ha

$$\Gamma_0(D_{m_0} f)(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (\widetilde{D} \Gamma_0)(\zeta^{-1} \circ z, 0) f(\zeta) d\zeta \tag{2.13}$$

dove $\widetilde{D}$ è un operatore differenziale del prim'ordine δ_λ-omogeneo di grado uno. Quindi (2.12) segue applicando il Teorema 2.1 con $G = (\widetilde{D}\Gamma_0)(\cdot, 0)$ e $\alpha = 1$.

Per mostrare (2.13), indichiamo con D_{m_k}, $k = 1, \ldots, r$, il gradiente rispetto alle variabili x_j per

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} m_i \leq j \leq \sum_{i=0}^{k} m_i.$$

Osserviamo che la matrice B in (2.4) è nilpotente e vale

$$E(s) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(-s)^k}{k!}(B^T)^k, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Dunque, in base a (2.14) e all'espressione (2.3) della legge di gruppo, deduciamo

$$\begin{aligned} D^{(\zeta)}_{m_0}\Gamma_0(z,\zeta) &= D^{(\zeta)}_{m_0}\Gamma_0(\zeta^{-1}\circ z, 0) \\ &= \left(-D_{m_0}\Gamma_0(\cdot,0) - \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^k}{k!}(t-\tau)^k D_{m_k}\Gamma_0(\cdot,0)B_k^T \cdots B_1^T\right)(\zeta^{-1}\circ z). \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 2.3 *Sotto-soluzione debole di* (1.1) *in un dominio* Ω *è una funzione* u *tale che* $u, D_{m_0}u, Yu \in L^2_{loc}(\Omega)$ *e*

$$\int_{\Omega} -\langle ADu, D\varphi\rangle + \varphi Y u \geq 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0. \tag{2.15}$$

Una funzione u *è una sopra-soluzione debole di* (1.1) *se* $-u$ *è sotto-soluzione.*

OSSERVAZIONE 2.4 *Se* u *è sotto e sopra-soluzione di* (1.1) *in* Ω *allora è soluzione,i.e. vale* (1.5). *Infatti, per ogni* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *possiamo considerare* $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ *tale che* $\psi \geq 0$ *e* $\varphi + \psi \geq 0$ *in* Ω. *Dunque* (1.5) *segue applicando la* (2.15) *a* $\pm u$.

Osserviamo che anche la soluzione fondamentale Γ_0 può essere usata come funzione test nella definizione di sopra e sotto-soluzione. Vale infatti il seguente lemma di cui omettiamo la prova.

LEMMA 2.5 *Sia* v *una sotto-soluzione debole di* (1.1) *in* Ω. *Per ogni* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, *e per quasi ogni* $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, *si ha*

$$\int_{\Omega} -\langle ADv, D(\Gamma_0(z,\cdot)\varphi)\rangle + \Gamma_0(z,\cdot)\varphi Y v \geq 0.$$

Un risultato analogo vale per le sopra-soluzioni deboli.

Concludiamo il paragrafo enunciando un lemma che si utilizza per dimostrare il Corollario 1.4 e la cui prova è standard.

LEMMA 2.6 *Sia* $f \in C^2 \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ *una funzione monotona crescente. Se* f *è convessa (risp. concava) e* u *è una sotto-soluzione debole (risp. sopra-soluzione) di* (1.1), *allora* $v = f(u)$ *è una sotto-soluzione (risp. sopra-soluzione) di* (1.1).

3 Disuguaglianze di Caccioppoli e Sobolev

In questo paragrafo diamo una traccia della prova delle stime di tipo Caccioppoli e di tipo Sobolev per le soluzioni non-negative di (1.1). Queste stime sono i due ingredienti essenziali per poter riprodurre il procedimento iterativo di Moser che è alla base del Teorema 1.2 di cui ometteremo la prova. Richiamiamo la notazione (1.6) e, per semplicità, scriveremo H_r invece di $H_r(0)$.

TEOREMA 3.1 **[Disuguaglianze di tipo Caccioppoli]** *Sia u una soluzione debole non negativa di (1.1) in R_1. Sia $p \in \mathbb{R}, p \neq 0, p \neq 1/2$ e siano ϱ, r tali che $\frac{1}{2} \leq \varrho < r \leq 1$. Se $u^p \in L^2(H_r)$ allora $D_{m_0}u^p \in L^2(H_\varrho)$ ed esiste una costante c, che dipende solo dalla dimensione omogenea Q, tale che*

$$\|D_{m_0}u^p\|_{L^2(H_\varrho)} \leq \frac{c\sqrt{\mu(\mu+\varepsilon)}}{\varepsilon(r-\varrho)}\|u^p\|_{L^2(H_r)}, \quad \textit{dove} \quad \varepsilon = \frac{|2p-1|}{4p}. \tag{3.1}$$

PROVA. Consideriamo il caso $p < 1, p \neq 0, p \neq 1/2$. Dapprima assumiamo che u sia uniformemente positiva, ossia che $u \geq u_0$ per una costante $u_0 > 0$. Poniamo $v = u^p$. Poichè u è soluzione debole di $Lu = 0$ e $u \geq u_0$, allora $v, D_{m_0}v, Yv \in L^2(H_r)$. Per ogni $\psi \in C_0^\infty(H_1)$, consideriamo la funzione $\varphi = u^{2p-1}\psi^2$. Si noti che φ e $D_{m_0}\varphi \in L^2(H_1)$, quindi possiamo utilizzare φ come funzione test in (1.5). Troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p}{2}\int_{H_1} \langle ADu, D\varphi\rangle - \varphi Yu \\ &= \frac{p}{2}\int_{H_1} (2p-1)u^{2p-2}\psi^2\langle ADu, Du\rangle + 2\psi u^{2p-1}\langle ADu, D\psi\rangle - u^{2p-1}\psi^2 Yu \\ &= \int_{H_1} \left(1-\frac{1}{2p}\right)\psi^2\langle ADv, Dv\rangle + v\psi\langle ADv, D\psi\rangle - \frac{\psi^2}{4}Y(v^2) = \end{aligned}$$

(utilizzando l'identità

$$\psi^2 Y(v^2) = Y(\psi^2 v^2) - 2v^2\psi Y\psi$$

e applicando il teorema della divergenza)

$$= \int_{H_1} \left(1-\frac{1}{2p}\right)\psi^2\langle ADv, Dv\rangle + v\psi\langle ADv, D\psi\rangle + \frac{v^2\psi}{2}Y\psi.$$

Posto $\varepsilon = \frac{|2p-1|}{4p}$ e usando la disuguaglianza

$$v\psi\,|\langle ADv, D\psi\rangle| \leq \varepsilon\psi^2\langle ADv, Dv\rangle + \frac{v^2}{4\varepsilon}\langle AD\psi, D\psi\rangle,$$

otteniamo infine

$$\varepsilon \int_{H_1} \psi^2 \langle ADv, Dv\rangle \leq \frac{1}{4} \int_{H_1} v^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \langle AD\psi, D\psi\rangle + 2\,|\psi Y \psi| \right). \tag{3.2}$$

La tesi è una conseguenza di un'opportuna scelta della funzione ψ in (3.2). Più precisamente poniamo

$$\psi(x,t) = \chi\left(\|(x,0)\|\right) \chi\left(|t|^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.3}$$

dove $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ è tale che

$$\chi(s) = 1 \text{ se } s \leq \varrho, \qquad \chi(s) = 0 \text{ se } s \geq r, \qquad |\chi'| \leq \frac{2}{r-\varrho}.$$

Osserviamo che

$$|\partial_t \psi|, |\partial_{x_j} \psi| \leq \frac{c_1}{r-\varrho}, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{3.4}$$

dove c_1 è una costante dimensionale. Allora, grazie a (3.2), otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\mu} \int_{H_\varrho} |D_{m_0} u^p|^2 &\leq \varepsilon \int_{H_r} \psi^2 \langle ADu^p, Du^p\rangle \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{H_r} u^{2p} \left(\frac{c_1 \mu}{\varepsilon (r-\varrho)^2} + \frac{2c_1}{r-\varrho} \right) \leq \frac{c_2}{(r-\varrho)^2} \left(1 + \frac{\mu}{\varepsilon}\right) \int_{H_r} u^{2p}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

che prova (3.1).

Consideriamo ora il caso generale di una soluzione u non negativa. Consideriamo la stima (3.5) per $u + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\varepsilon}{\mu} \int_{H_\varrho} \left| D_{m_0} \left(u + \frac{1}{n} \right)^p \right|^2 \leq \frac{c_2}{(r-\varrho)^2} \left(1 + \frac{\mu}{\varepsilon} \right) \int_{H_r} \left(u + \frac{1}{n} \right)^{2p},$$

e mandiamo n all'infinito. Il passaggio al limite nel primo integrale è giustificato da

$$\left| D_{m_0} \left(u + \frac{1}{n} \right)^p \right| = p \left(u + \frac{1}{n} \right)^{p-1} |D_{m_0} u| \quad \uparrow \quad |D_{m_0} u^p|, \qquad \forall p < 1,\ n \longrightarrow \infty.$$

Per il secondo integrale utilizziamo l'ipotesi $u^p \in L^2(H_r)$.

Il caso $p \geq 1$ è sostanzialmente analogo, anche se è necessario utilizzare delle funzioni di troncamento per garantire la necessaria sommabilità delle potenze u^p. □

TEOREMA 3.2 **[Disuguaglianze di tipo Sobolev per sopra e sotto-soluzioni].** *Sia v una sotto-soluzione debole non-negativa di L in H_1. Allora $v \in L^{2\kappa}_{\mathrm{loc}}(H_1)$, $\kappa = 1 + \frac{2}{Q}$, ed esiste una costante c che dipende solo da Q e μ, tale che*

$$\|v\|_{L^{2\kappa}(H_\varrho)} \leq \frac{c}{r-\varrho} \left(\|v\|_{L^2(H_r)} + \|D_{m_0} v\|_{L^2(H_r)} \right), \tag{3.6}$$

per ogni ϱ, r con $\frac{1}{2} \le \varrho < r \le 1$.

Un risultato analogo vale per le sopra-soluzioni deboli non-negative.

PROVA. Sia v una sotto-soluzione debole non-negativa di L. Rappresentiamo v in termini della soluzione fondamentale Γ_0. A tal fine, consideriamo la funzione cut-off ψ introdotta in (3.3). Per ogni $z \in H_\varrho$, abbiamo

$$v(z) = v\psi(z) = \int_{H_r} [\langle A_0 D(v\psi), D\Gamma_0(z,\cdot)\rangle - \Gamma_0(z,\cdot)Y(v\psi)](\zeta)d\zeta = I_1(z) + I_2(z) + I_3(z), \tag{3.7}$$

dove

$$I_1(z) = \int_{H_r} [\langle A_0 D\psi, D\Gamma_0(z,\cdot)\rangle v](\zeta)d\zeta - \int_{H_r} [\Gamma_0(z,\cdot)vY\psi](\zeta)d\zeta,$$

$$I_2(z) = \int_{H_r} [\langle (A_0 - A)Dv, D\Gamma_0(z,\cdot)\rangle\psi](\zeta)d\zeta - \int_{H_r} [\Gamma_0(z,\cdot)\langle ADv, D\psi\rangle](\zeta)d\zeta,$$

$$I_3(z) = \int_{H_r} [\langle ADv, D(\Gamma_0(z,\cdot)\psi)\rangle - \Gamma_0(z,\cdot)\psi Yv](\zeta)d\zeta.$$

Poichè la funzione v è sotto-soluzione debole di L, il Lemma 2.5 implica che $I_3 \le 0$, e quindi

$$0 \le v(z) \le I_1(z) + I_2(z) \quad \text{per quasi ogni } z \in H_\varrho.$$

Per concludere è sufficiente stimare v con una somma di L_0-potenziali.

Cominciamo col considerare I_1. Indichiamo con I_1' e I_1'' rispettivamente il primo e il secondo integrale in I_1. Allora I_1' si stima grazie alla (2.12) del Corollario 2.2 come segue

$$\|I_1'\|_{L^{2\kappa}(H_\varrho)} \le c\|vD_{m_0}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+1})} \le \frac{c}{r-\varrho}\|v\|_{L^2(H_r)},$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da (3.4). Per stimare I_1'' utilizziamo la (2.11):

$$\|I_1''\|_{L^{2\kappa}(H_\varrho)} \le \operatorname{meas}(H_\varrho)^{2/Q}\|I_1''\|_{L^{2\tilde{\kappa}}(H_\varrho)} \le c\|vY\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{N+1})} \le \frac{c}{r-\varrho}\|v\|_{L^2(H_r)}.$$

Con la stessa tecnica proviamo che

$$\|I_2\|_{L^{2\kappa}(H_\varrho)} \le \frac{c}{r-\varrho}\|D_{m_0}v\|_{L^2(H_r)},$$

per una costante $c = c(Q,\mu)$.

Con un argomento analogo si prova la tesi nel caso di v L-sopra-soluzione. In tal caso è necessario introdurre il seguente operatore ausiliario

$$\widetilde{L}_0 = \operatorname{div}(A_0 D) + \widetilde{Y}, \qquad \widetilde{Y} \equiv -\langle x, BD\rangle - \partial_t,$$

e rappresentare v in termini della soluzione fondamentale di $\widetilde{L}_0$. □

Riferimenti bibliografici

[1] F. Antonelli and A. Pascucci, *On the viscosity solutions of a stochastic differential utility problem*, preprint, (2002).

[2] E. Barucci, S. Polidoro, and V. Vespri, *Some results on partial differential equations and Asian options*, Math. Models Methods Appl. Sci., 11 (2001), pp. 475–497.

[3] M. Bramanti, M. C. Cerutti, and M. Manfredini, *L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients*, J. Math. Anal. Appl., 200 (1996), pp. 332–354.

[4] L. Capogna, D. Danielli, and N. Garofalo, *An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations, 18 (1993), pp. 1765–1794.

[5] F. Chiarenza and R. Serapioni, *A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 73 (1985), pp. 179–190.

[6] G. Citti, A. Pascucci, and S. Polidoro, *Regularity properties of viscosity solutions of a non-Hörmander degenerate equation*, J. Math. Pures Appl. (9), 80 (2001), pp. 901–918.

[7] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3), 3 (1957), pp. 25–43.

[8] L. Desvillettes and C. Villani, *On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation*, Comm. Pure Appl. Math., 54 (2001), pp. 1–42.

[9] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and H. P. Malytska, *A modified Levi method: development and application*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 5 (1998), pp. 14–19.

[10] E. B. Fabes and D. W. Stroock, *A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash*, Arch. Rational Mech. Anal., 96 (1986), pp. 327–338.

[11] G. B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., 13 (1975), pp. 161–207.

[12] B. Franchi and E. Lanconelli, *Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Special Issue (1982), pp. 105–114. Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982).

[13] ——, *Une condition géométrique pour l'inégalité de Harnack*, J. Math. Pures Appl. (9), 64 (1985), pp. 237–256.

[14] C. E. Gutiérrez and E. Lanconelli, *Maximum principle, harnack inequality and liouville type theorems for x-elliptic operators*, preprint, (2002).

[15] C. E. Gutiérrez and R. L. Wheeden, *Mean value and Harnack inequalities for degenerate parabolic equations*, Colloq. Math., 60/61 (1990), pp. 157–194.

[16] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.

[17] A. M. Il'in, *On a class of ultraparabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 159 (1964), pp. 1214–1217.

[18] A. Kolmogorov, *Zufllige Bewegungen. (Zur Theorie der Brownschen Bewegung.).*, Ann. of Math., II. Ser., 35 (1934), pp. 116–117.

[19] L. P. Kupcov, *Harnack's inequality for generalized solutions of second order degenerate elliptic equations*, Differencial'nye Uravnenija, 4 (1968), pp. 110–122.

[20] ——, *The fundamental solutions of a certain class of elliptic-parabolic second order equations*, Differencial'nye Uravnenija, 8 (1972), pp. 1649–1660, 1716.

[21] E. Lanconelli and F. Lascialfari, *A boundary value problem for a class of quasilinear operators of Fokker-Planck type*, in Proceedings of the Conference "Differential Equations" (Italian) (Ferrara, 1996), vol. 41 suppl., 1996, pp. 65–84 (1997).

[22] E. Lanconelli and S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 52 (1994), pp. 29–63. Partial differential equations, II (Turin, 1993).

[23] F. Lascialfari and D. Morbidelli, *A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations, 23 (1998), pp. 847–868.

[24] E. M. Lifschitz and L. P. Pitaevskii, *Teoreticheskaya fizika ("Landau-Lifshits"). Tom 10*, "Nauka", Moscow, 1979. Fizicheskaya kinetika. [Physical kinetics].

[25] P.-L. Lions, *On Boltzmann and Landau equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 346 (1994), pp. 191–204.

[26] A. Lunardi, *Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in* $\mathbb{R}^N$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 24 (1997), pp. 133–164.

[27] M. Manfredini, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations*, Adv. Differential Equations, 2 (1997), pp. 831–866.

[28] M. Manfredini and S. Polidoro, *Interior regularity for weak solutions of ultraparabolic equations in divergence form with discontinuous coefficients*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), 1 (1998), pp. 651–675.

[29] J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), pp. 457–468.

[30] ——, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), pp. 577–591.

[31] ——, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), pp. 101–134.

[32] ——, *Correction to: "A Harnack inequality for parabolic differential equations"*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), pp. 231–236.

[33] ——, *On a pointwise estimate for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), pp. 727–740.

[34] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math., 80 (1958), pp. 931–954.

[35] V. I. Oliker and N. N. Ural'tseva, *Evolution of nonparametric surfaces with speed depending on curvature. II. The mean curvature case*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), pp. 97–135.

[36] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Matematiche (Catania), 49 (1994), pp. 53–105 (1995).

[37] ——, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 137 (1997), pp. 321–340.

[38] S. Polidoro and M. A. Ragusa, *Sobolev-Morrey spaces related to an ultraparabolic equation*, Manuscripta Math., 96 (1998), pp. 371–392.

[39] H. Risken, *The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications*, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1989.

[40] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices, (1992), pp. 27–38.

[41] L. Saloff-Coste and D. W. Stroock, *Opérateurs uniformément sous-elliptiques sur les groupes de Lie*, J. Funct. Anal., 98 (1991), pp. 97–121.

[42] J. I. Šatyro, *The smoothness of the solutions of certain degenerate second order equations*, Mat. Zametki, 10 (1971), pp. 101–111.

[43] I. M. SONIN, *A class of degenerate diffusion processes*, Teor. Verojatnost. i Primenen, 12 (1967), pp. 540–547.

[44] M. WEBER, *The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type*, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), pp. 24–37.

[45] P. ZAMBONI, *The Harnack inequality for quasilinear elliptic equations under minimal assumptions*, Manuscripta Math., 102 (2000), pp. 311–323.